CHAPITRE 2 – DYNAMIQUE : PRINCIPES GENERAUX **2**

I - PRINCIPE D'ACTION-RÉACTION ; NOTIONS DE FORCES INTÉRIEURES, DE FORCES EXTÉRIEURES ; SYSTÈME ISOLÉ, SYSTÈME PSEUDO-ISOLÉ. **2**

II – LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE. **4**

III - LES RÉFÉRENTIELS GALILÉENS. **6**

IV - LE THÉORÈME DE L'ENERGIE CINÉTIQUE. **7**

V - MISE EN ÉQUATION DES PROBLÈMES. **8**

VI - QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION. **9**

CHAPITRE 2 – DYNAMIQUE : PRINCIPES GENERAUX

La Dynamique est la partie de la Mécanique qui étudie les systèmes en mouvement.

En ce qui nous concerne, nous nous bornerons à l'étude du mouvement du centre d'inertie du solide : nous considérerons les systèmes ramenés à leur centre d'inertie où sera supposée être concentrée la masse m du système considéré.

Dans ce chapitre, nous allons voir les théorèmes et principes généraux qui permettent l'étude des mouvements des solides.

I - PRINCIPE D'ACTION-RÉACTION ; NOTIONS DE FORCES INTÉRIEURES, DE FORCES EXTÉRIEURES ; SYSTÈME ISOLÉ, SYSTÈME PSEUDO-ISOLÉ.

1) Principe d'action-réaction.

Lorsqu'un système S_1 exerce sur un système S_2 la force $\vec{F}_{12}$, alors, le système S_2 exerce sur le système S_1 la force $\vec{F}_{21}$, ces deux forces sont telles que :

$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{12} = \vec{0}$, en d'autres termes $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{12}$ sont deux forces opposées.

2) Forces intérieures, forces extérieures.

Considérons la situation représentée sur la figure II - 1: un véhicule V attelé d'une remorque R gravit une côte, on suppose les frottements négligeables, lorsqu'on fait le décompte des forces, on remarque qu'il faut prendre en compte

- les poids des divers éléments: ici, $\vec{P}_R$ et $\vec{P}_V$
- les interactions entre les divers éléments par exemple : $\vec{A}_{RV}$ action de la remorque sur le véhicule ou $\vec{A}_{VR}$ action du véhicule sur la remorque
- action du sol sur R et V : forces du type $\vec{R}_S$.

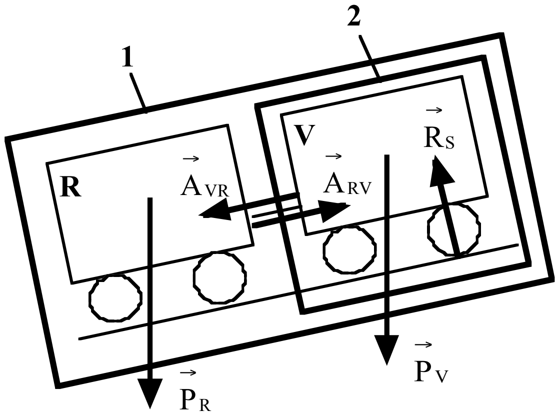

Figure II - 1

On rappelle que, la réaction du support est une force de contact qui est dirigée perpendiculairement au support en absence de frottement ; en présence de frottement, elle se décompose en deux composantes: une composante tangentielle au support qui traduit l'importance des frottements et une composante normale (réaction en absence de frottement).

Pour le système constitué par l'ensemble **1** , le véhicule **V** pris isolément, $\vec{P}_V, \vec{R}_V$ et $\vec{A}_{RV}$, sont des forces extérieures; si on considère le système constitué par l'ensemble **2** le véhicule **V** et la remorque **R**, alors $\vec{A}_{RV}$ et $\vec{A}_{VR}$ sont des forces extérieures.

On voit à travers cet exemple l'importance que l'on doit attacher à la définition d'un système mécanique de façon à bien séparer l'"intérieur" et l'"extérieur" du système (cette notion de "système" se retrouve dans tous les domaines de la Physique).

3) Système isolé, système pseudo-isolé

Un système isolé est un système qui n'est soumis à aucune force extérieure : un tel système pourra être par exemple un véhicule spatial navigant à grande distance de tout astre.

Un système pseudo isolé est un système pour lequel les forces extérieures se compensent exactement: par exemple le mobile auto porteur placé sur la table à coussin d'air dont on se sert pour les expériences de Mécanique au Lycée.

Dans les problèmes que nous étudierons, on ne pourra pas parler de systèmes isolé, mais par contre si on considère un livre placé sur une table, alors la réaction de la table compense le poids du livre et on pourra dans ce cas parler de système pseudo isolé.

II – LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE.

On considère le système isolé représenté sur la figure II – 2 que l'on assimilera à un point matériel de masse m, invariable au cours du temps, concentrée au centre d'inertie G du système, animé de la vitesse $\vec{V}$.

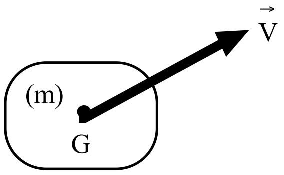

Figure II - 2

On définit le vecteur quantité de mouvement du système $\vec{p}$ tel que : $\vec{p} = m.\vec{V}$.

Expérimentalement, on constate que lorsqu'on applique une force à un solide, on peut modifier sa quantité de mouvement, le Principe (ou relation) Fondamental(e) de la Dynamique (que nous rencontrerons sous la forme abrégée PFD....) permet de calculer la variation de $\vec{p}$.

> Il existe un référentiel dit référentiel galiléen, tel que, si un ensemble de n forces extérieures $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext}$ appliquées à un solide provoque une variation de sa quantité de mouvement alors: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Or : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m.\vec{V}\right)}{dt} = \vec{V}.\frac{dm}{dt} + m.\frac{d\vec{V}}{dt}$ voir opérations sur les dérivées, la masse du système étant constante : $\frac{dm}{dt} = 0$; on a vu dans le chapitre I que : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$; par suite :

$$\boxed{m.\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext}} \quad [II\text{-}1]$$

Le vecteur accélération du centre d'inertie d'un système matériel est colinéaire à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées et la norme de ce vecteur est - proportionnelle à la norme du vecteur représentant la somme des forces extérieures - inversement proportionnelle à la masse du système.

Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel le Principe Fondamental de la Dynamique est applicable.

Une conséquence directe du Principe fondamental de la Dynamique est le **Principe de l'inertie**: dans le cas où le système est isolé ou pseudo-isolé, alors, $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext} = \vec{0}$, c'est à dire : $m.\vec{a} = \vec{0}$ soit $\vec{a} = \vec{0}$, donc le vecteur vitesse est un vecteur constant (intensité et direction constantes au cours du temps)

Le centre d'inertie d'un système isolé ou pseudo isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

III - LES RÉFÉRENTIELS GALILÉENS.

Un référentiel est dit galiléen lorsqu'on peut y appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique et le Principe de l'Inertie.

On montre que lorsqu'on a déterminé un référentiel galiléen R_G , on en a déterminé une infinité d'autres, ce sont ceux qui sont animés d'un mouvement de translation uniforme par rapport à R_G .

IV - LE THÉORÈME DE L'ENERGIE CINÉTIQUE.

On admettra, sans démonstration, le Théorème de l'Energie Cinétique (que l'on écrira en abrégé TEC).

> Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m entre deux points A et B est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures entre ces deux points.

C'est à dire : $E_{Cfin} - E_{Cini} = \sum_{i=1}^{n} W_{ext}$ ou encore:

$$\frac{1}{2}.m.V_{fin}^2 - \frac{1}{2}.m.V_{ini}^2 = \sum_{i=1}^{n} W_{ext} \quad \text{[II-2]}$$

où, V_{ini} et V_{fin} représentent respectivement les vitesses initiale (en A) et finale (en B) du point matériel; lorsqu'on parle de somme algébrique, il faut bien entendu sous entendre que les travaux sont des quantités algébriques: positives pour les travaux moteurs, négatives pour les travaux résistants.

On rappelle que :

- le travail des forces de pesanteur entre deux points d'altitudes respectives h_A et h_B par rapport à l'altitude de référence 0, ne dépend que des altitudes de ces deux points et est indépendant du chemin suivi, il est égal à : $W_P = mg.(h_A - h_B)$, si $h_A > h_B$, le point matériel "descend", $W_P > 0$, travail moteur; si $h_A < h_B$, le point matériel "s'élève", $W_P < 0$, travail résistant.
- lorsqu'un point matériel se déplace rectilignement du point A au point B et si entre A et B s'exerce une force constante $\vec{F}$ de norme F, telle que l'angle $\left(\vec{F}, \vec{AB}\right) = \alpha$, alors: $W_F = \vec{F}.\vec{AB} = F.AB.\cos\alpha$; il faut noter que le travail d'une force perpendiculaire au déplacement est nul.

V - MISE EN ÉQUATION DES PROBLÈMES.

Le Principe Fondamental de la Dynamique et/ou le Théorème de l'Energie Cinétique permettent pour un système donné de déterminer, soit l'accélération du système, soit la vitesse du système dans tel ou tel état.

Pour résoudre les problèmes en utilisant le PFD ou le TEC il faut procéder de façon systématique: nous allons donner ci dessous la marche à suivre (une sorte de règle du jeu) dans chacun des cas :

APPLICATION DU PFD:	APPLICATION DU TEC:
- Définir le système étudié - Choisir le référentiel galiléen qui s'adapte le mieux au système - Faire le bilan des forces extérieures s'appliquant au système - Appliquer dans le référentiel choisi le PFD - Projeter sur des axes convenables l'équation vectorielle obtenue, en déduire les composantes de l'accélération.	- Définir le système étudié - Choisir le référentiel galiléen qui s'adapte le mieux au système - Faire le bilan des forces extérieures s'appliquant au système - Appliquer dans le référentiel choisi le TEC - En déduire la vitesse recherchée.

VI - QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION.

1) Mouvement d'un solide sur un plan incliné avec forces de frottement.

Il s'agit dans cet exemple d'étudier le mouvement d'un solide de masse m le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (figure II-3), le solide est lâché du point A, à un instant que l'on choisit comme origine des temps (t = 0), avec la vitesse $\vec{V}_A$ dirigée selon la ligne de plus grande pente du plan .

On peut aborder le problème selon deux aspects
- un aspect dynamique : par l'intermédiaire du PFD
- un aspect énergétique : par l'intermédiaire du TEC

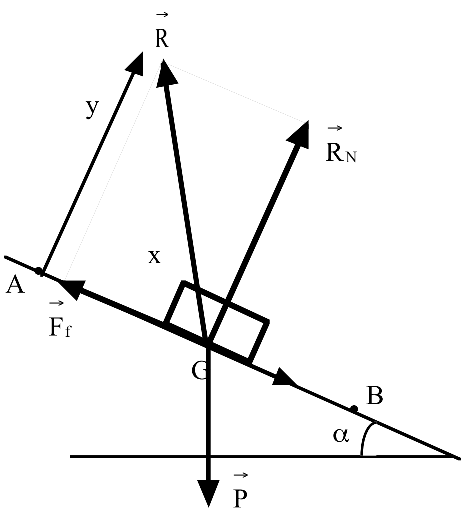

Figure II - 3

a) Application du Principe Fondamental de la Dynamique.

- le système est ici constitué par le solide que l'on ramènera à son centre d'inertie G où sera concentrée la masse m

- on choisit le référentiel (Ax,Ay) tel que Ax est dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan, Ay est la direction perpendiculaire (figure II-3), l'origine des temps étant choisie à l'instant où le mobile se trouve en A

- lorsqu'on fait le bilan des forces extérieures, on doit tenir compte:

* du poids du mobile : $\vec{P}$, vertical dirigé de haut en bas, de norme P = m.g, où g désigne le module de l'accélération de la pesanteur

** de la réaction du plan incliné : $\vec{R}_N$, dont la direction est perpendiculaire au support de norme R_N

*** des forces de frottement que l'on peut représenter par le vecteur : $\vec{F}_f$, colinéaire à Ax et dont le sens est opposé au sens du déplacement, de norme F_f

- si on appelle $\vec{a}$ l'accélération du mobile, le PFD s'écrit alors : $m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_f$ [II-3]

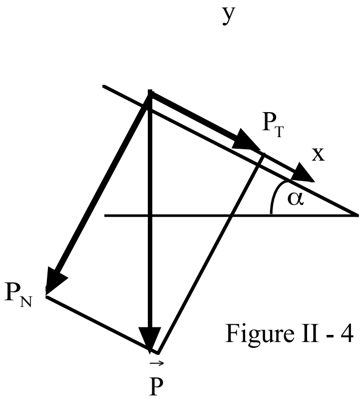

Figure II - 4

- on projette ensuite cette relation vectorielle sur deux

axes
"convenables", on choisit les axes du référentiel Ax et Ay: ce choix, comme ceux que l'on pourra faire par la suite, doit permettre des simplifications lorsque les projections seront effectuées.

Le mouvement du mobile s'effectue suivant la direction Ax, il est donc rectiligne et l'accélération sera colinéaire à Ax, soit a la mesure algébrique de l'accélération:
en projection sur la ligne de plus grande pente du plan, Ax, on obtient : $m.a = P_T - F_f$ où, P_T désigne la projection du poids suivant Ax (figure II-4),

$P_T = m.g.\sin a$ et F_f la norme de $\vec{F_f}$, le signe - est justifié par le fait que ce vecteur est de sens opposé à Ax, donc : $m.a = m.g.\sin a - F_f$, on en déduit : $a = \frac{m.g.\sin\alpha - F_f}{m}$ [II-4]: donc l'accélération du mouvement est constante, différente de 0 et par suite, le mouvement est uniformément accéléré (remarque: en absence de frottement, $a = g.\sin a$); ensuite, on pourra exprimer la valeur algébrique de la vitesse à l'instant t : $v(t) = a.t + V_A$, et l'abscisse du point matériel à l'instant t: $x(t) = \frac{1}{2}.a.t^2 + V_A.t + x_A$, $x_A$étant nul compte tenu du choix que nous avons fait, on peut donc résumer les résultats "cinématiques"

$$\boxed{\text{accélération} : a = \frac{m.g.\sin\alpha - F_f}{m}} \quad \text{[II-5]}$$

$$\boxed{\text{vitesse instantanée} : v(t) = \frac{m.g.\sin\alpha - F_f}{m}.t + V_A} \quad \text{[II-6]}$$

$$\boxed{\text{position} : x = \frac{1}{2}.\frac{m.g.\sin\alpha - F_f}{m}.t^2 + V_A.t} \quad \text{[II-7]}$$

b) Application du Théorème de l'Energie Cinétique

C'est la façon "énergétique" de traiter le problème: ici il s'agira par exemple de calculer la vitesse du mobile en B, tel que la distance AB = d

La situation est bien entendu identique à ce qui se passait en a): même système et mêmes forces extérieures

On écrit que la variation d'énergie cinétique entre les points A et B (énergie cinétique finale - énergie cinétique initiale = $\frac{1}{2}.m.v_B^2 - \frac{1}{2}.m.v_A^2$) est égale à la somme des travaux des forces extérieures entre les points A et B
- le travail du poids entre les points A et B est $W_P = m.g.(z_A - z_B)$, $z_A - z_B$ représente la

dénivellation entre les points A et B, on remarque ici que le travail du poids est positif (travail moteur) car le mobile "descend"

- le travail de la réaction normale $\vec{R}_N$ est nul parceque sa direction est constamment perpendiculaire au déplacement

- le travail des forces de frottement $\vec{F}_f$ est résistant (la force est de sens opposé au déplacement) et a pour valeur : $- F_f.AB$ dans ces conditions :

$$\frac{1}{2}.m.v_B^2 - \frac{1}{2}.m.v_A^2 = m.g.(z_A - z_B) - F_f.AB \text{, or } z_A - z_B = AB.\sin\alpha \text{ ;}$$

$$\text{d'où : } v_B = \sqrt{\frac{2.(m.g.d.\sin\alpha - F_f) + m.v_A^2}{m}} \quad \text{[II-8]}$$

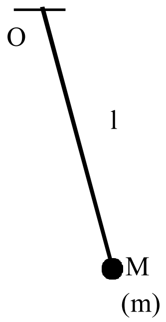

Figure II - 5

Il est bien évident que l'on aurait trouvé le même résultat à partir du PFD, à partir de l'expression de l'accélération.

2) Etude du pendule simple (on néglige les frottements)

Dans les exemples qui suivent, on utilisera un pendule simple: un pendule simple est un système constitué par une masse ponctuelle M (de masse m), accrochée à l'une des extrémités d'un fil inextensible de longueur l, l'autre extrémité du fil étant fixée à un point O (figure II - 5).

a) Pendule simple oscillant dans un plan vertical.

On considère un pendule simple de masse m et de longueur l, on écarte le pendule par rapport à sa position d'équilibre, définie par la droite OO', de l'angle θ_0, et on le lâche sans vitesse initiale, le problème que l'on se propose de traiter ici est la détermination de la tension du fil au passage à la position d'équilibre (figure II - 6).

On commence par écrire le Principe Fondamental de la Dynamique : donc, on doit dans un premier temps faire le bilan des forces extérieures, qui ici, compte tenu de l'absence de frottement se réduisent au poids $\vec{P}$ et à la

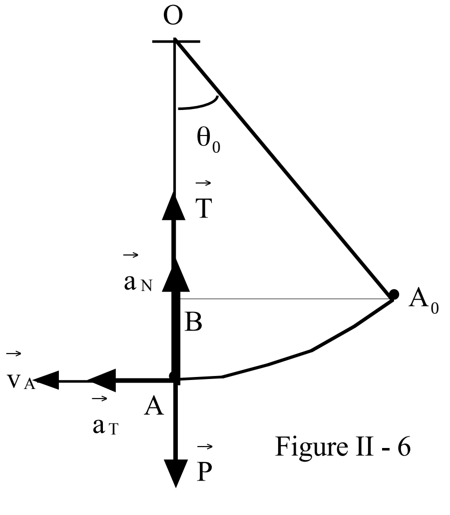

Figure II - 6

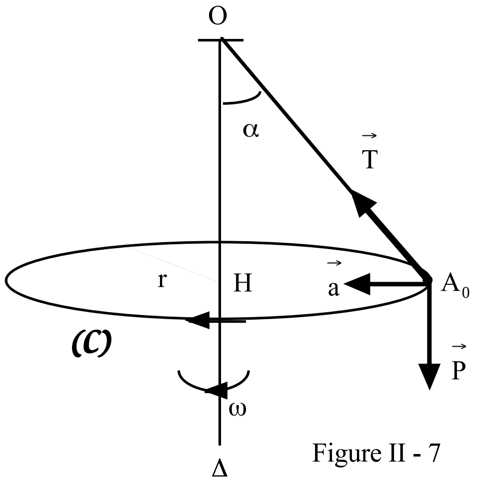

Figure II - 7

tension $\vec{T}$. On peut alors écrire, en appelant $\vec{a}$ l'accélération du mobile au passage par la verticale: $m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ où $\vec{T}$ désigne la tension du fil au passage du mobile par la verticale, or, on a vu (chapitre 1) que : $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$, où $\vec{a}_N$ et $\vec{a}_T$ désignent respectivement l'accélération normale et l'accélération tangentielle à l'instant considéré, on projette cette relation sur deux axes perpendiculaires convenablement choisis :

- sur l'axe vertical orienté positivement vers le haut, en appelant a_N, T et P, les normes de la composante normale, de la tension du fil et du poids, on obtient : $m.a_N = T - P$ (II - 9)
- sur l'axe horizontal, les projections de la tension et du poids sont nulles et il en résulte donc que $m.a_T = 0$; on a vu que la norme de l'accélération tangentielle était telle que: $\left\|\vec{a}\right\| = \frac{d\left\|\vec{V}\right\|}{dt}$|, ce qui signifie physiquement, qu'au passage par la verticale la norme de la vitesse passe par un extremum, la vitesse initiale étant nulle, on peut donc en déduire que la vitesse passe par un maximum au passage par la verticale; de la relation (II - 9) on déduit: $T = m.a_N + P$ (II - 10), on a vu que la norme de l'accélération normale a_N était telle que : $a_N = \frac{V_A^2}{l}$ (II – 11), où, bien entendu V_A désigne la vitesse du mobile au passage par la verticale, que l'on va déterminer à partir du Théorème de l'Energie Cinétique, en écrivant que la variation d'énergie cinétique entre les points A_0 et A est égale à la somme du travail du poids, travail moteur égal à m.g.H, en appelant H la dénivellation entre les points A_0 et A, H = OA - OB = l.(cos0 - cosθ) = l.(1 - cosθ) et du travail de la tension, ce travail est nul, car la tension est constamment perpendiculaire au déplacement, donc $\frac{1}{2}.m.V_A^2 = m.g.l.(1 - \cos\theta)$, soit : $V_A^2 = 2.l.(1 - \cos\theta)$; on injecte en tenant compte de (II - 11) cette valeur dans (II - 10) et on obtient la valeur de la tension du fil en A :

T = g.m.(3-2.cosθ)

b) Pendule conique.

On considère le pendule simple constitué par une masse ponctuelle m, de longueur l solidaire d'un axe vertical Δ animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω, lorsque le régime permanent est établi, le pendule est animé lui aussi d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω, le fil va, dans ces conditions, décrire un cône de demi angle au sommet α, angle que l'on se propose de calculer dans cet exemple, alors que la masse m va décrire, dans un plan horizontal, une trajectoire *(C)* circulaire de rayon r, à vitesse angulaire constante ω (figure II - 7).

Par rapport au référentiel galiléen du laboratoire, on peut appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse m, sur laquelle s'appliquent les forces extérieures $\vec{P}$ et $\vec{T}$ (poids et tension du fil et écrire : $m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ $\vec{a}$ se réduit ici à l'accélération centripète, contenue dans le plan horizontal et dirigée vers Δ (le mouvement est circulaire uniforme) de norme $a = \omega^2.r$, on projette cette relation vectorielle sur deux axes : sur l'axe vertical orienté positivement vers le haut : $0 = -P + T.\cos\alpha$ sur l'axe horizontal orienté positif de la masse m à l'axe Δ : $m.\omega^2.r = 0 + T.\sin\alpha$ en éliminant T entre ces deux dernières équations, on obtient: $m.\omega^2.r = P.\tan\alpha$ (II - 12) on peut exprimer r en fonction de a : $r = l.\sin\alpha$, soit finalement en remplaçant dans (II - 12) :

$m.\omega^2.l.\sin\alpha = m.g.\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ c'est à dire :

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2.l}} \qquad (II – 13)$$

Remarques :

- $\cos\alpha$ est ici positif, est de plus $\cos\alpha$ est inférieur ou égal à 1, ce qui entraîne donc : $\dfrac{g}{\omega^2.l} \le 1$; c'est à dire : $\omega^2 \ge \dfrac{g}{l}$; donc le pendule ne s'éloignera de la verticale qu'à condition que la vitesse angulaire de rotation de l'axe Δ soit telle que : $\boxed{\omega \ge \sqrt{\dfrac{g}{l}}}$
- on peut aussi remarquer que lorsqu'on fait tendre ω vers l'infini dans la relation (II - 13), $\cos\alpha$

tend vers 0, et par suite α tend vers $\frac{\pi}{2}$(90°), donc la masse m va tourner dans le plan horizontal passant par O.